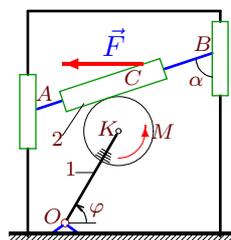


## Уравнение Лагранжа для системы с одной степенью свободы

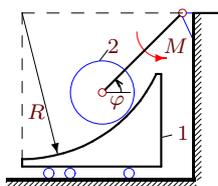
Кирсанов М.Н. **Решебник. Теоретическая механика**/Под ред. А. И. Кириллова.– М.:ФИЗМАТЛИТ, 2008.– 384 с. (с.300.)

### Задача 30.1.



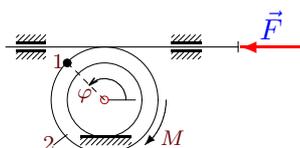
Две муфты, скользящие по вертикальным направляющим, жестко соединены стержнем  $AB$ , по которому движется муфта  $C$ . Диск радиуса  $r$ , жестко соединенный с кривошипом  $OK = a$ , катится по этой муфте без проскальзывания. Масса кривошипа равна  $m_1$ , муфты  $C$  —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к муфте  $C$  — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

### Задача 30.2.



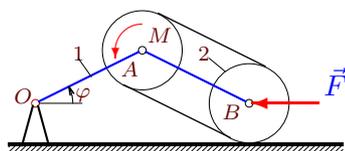
Груз массой  $m_1$  движется на невесомых подшипниках по горизонтальной плоскости. По цилиндрической поверхности груза радиусом  $R = 4r$  катится диск радиусом  $r$ , закрепленный на стержне длиной  $3r$ . К стержню приложен момент  $M$ . Масса диска  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

### Задача 30.3.



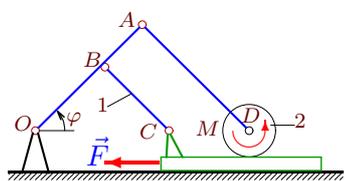
Внутренним ободом блок катится по неподвижной поверхности, внешним — касается подвижного штока. На блоке расположена точка массой  $m_1$ . Радиусы блока  $R$  и  $r$ . Масса блока  $m_2$ , радиус инерции —  $\rho$ . К блоку приложен момент  $M$ , к штоку — сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

### Задача 30.4.



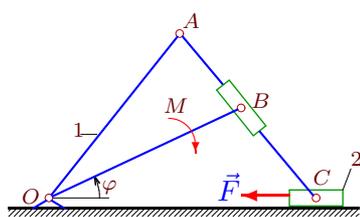
Два цилиндра одинакового радиуса  $R$  связаны нерастяжимой нитью. Оси цилиндров соединены стержнем  $AB$  шарнирного двухзвенника  $OAB$ . Цилиндр  $B$  катается по горизонтальной плоскости. К оси  $B$  приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру  $A$  — момент  $M$ ;  $OA = AB = a$ . Масса кривошипа  $OA$  равна  $m_1$ , цилиндра  $B$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

### Задача 30.5.



Цилиндр радиуса  $R$  катается по горизонтальной поверхности платформы, скользящей по гладкой плоскости. Стержень  $BC = a$  шарнирно соединяет кривошип  $OA$  и платформу. К платформе приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ ;  $OB = a$ ,  $OA = AD = b$ . Масса стержня  $BC$  равна  $m_1$ , цилиндра —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

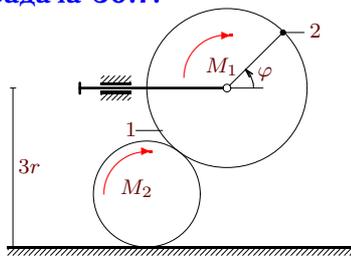
### Задача 30.6.



На стержень  $AC$  двухзвенника  $OAC$  надета невесомая муфта  $B$ , шарнирно закрепленная на кривошипе  $OB$  длиной  $a$ . К кривошипу приложен момент  $M$ , к ползуну  $C$ , скользящему по горизонтальной поверхности, сила  $F$ ;  $OA = AC = a$ . Масса стержня  $OA$  равна  $m_1$ , масса ползуна  $C$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.7.**

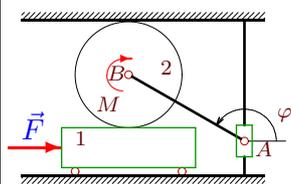
7



Цилиндр радиуса  $r$  катится по неподвижной поверхности и находится в зацеплении с цилиндром радиуса  $R = 1.5r$ , закрепленным шарнирно на горизонтальном штоке. К цилиндрам приложены моменты  $M_1$  и  $M_2$ . Масса верхнего цилиндра равна  $m_1$ , точки на ободе —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $\varphi$ .

**Задача 30.8.**

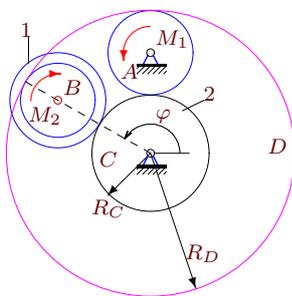
7



По вертикальной направляющей движется муфта  $A$ , шарнирно соединенная с диском радиусом  $R$ . Верхней точкой обода диск касается горизонтальной поверхности, нижней — бруска массой  $m_1$  на невесомых подшипниках. Масса диска  $m_2$ .  $AB = a$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**Задача 30.9.**

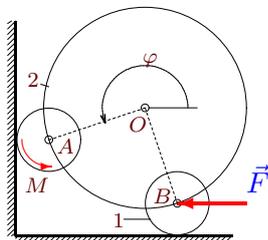
7



Цилиндр  $A$  с неподвижной осью находится в зацеплении с цилиндром  $C$  и внутренней поверхностью трубы  $D$ . Труба и цилиндр  $C$  вращаются на одной горизонтальной оси в разные стороны. Блок  $B$  катится без сопротивления и проскальзывания большим радиусом по цилиндру  $C$  и меньшим по внутренней поверхности трубы  $D$ . К цилиндру  $A$  приложен момент  $M_1$ , к блоку —  $M_2$ . Масса блока —  $m_1$ , момент инерции блока  $J_B$ . Масса цилиндра  $C$  —  $m_2$ . Даны радиусы цилиндра  $R_C$ , трубы  $R_D$  и меньший радиус блока  $r_B$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота цилиндра  $C$   $\varphi$ .

**Задача 30.10.**

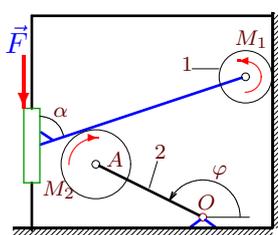
7



Оси цилиндров одинакового радиуса  $r$  расположены на ободе диск радиуса  $R = 4r$ ,  $AO \perp BO$ . Цилиндр 1 массой  $m_1$  катится по горизонтальной плоскости, другой цилиндр — по вертикальной. Масса диска  $m_2$ . К оси цилиндра 1 приложена горизонтальная сила  $F$ . Момент  $M$  приложен к цилиндру. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота диска  $\varphi$ .

**Задача 30.11.**

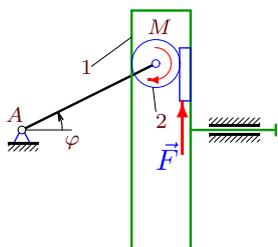
7



К вертикально движущейся муфте жестко прикреплен наклонный стержень, на конце которого расположен диск радиуса  $r$ , катящийся по вертикальной плоскости. Цилиндр радиуса  $R$ , на кривошипе  $OA = a$ , катится по стержню без проскальзывания. Масса диска равна  $m_1$ , кривошипа —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M_1$ , к цилиндру момент  $M_2$ , к муфте — вертикальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.12.**

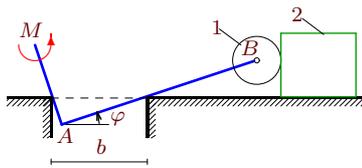
7



Цилиндр, шарнирно закрепленный на кривошипе длиной  $L$ , катится без проскальзывания по внутренней поверхности корпуса кулисы, увлекая в движение пластину, с которой он находится в зацеплении. Пластина скользит по корпусу без сопротивления. К цилиндру приложен момент  $M$ , к пластине — вертикальная сила  $F$ . Масса кулисы —  $m_1$ , цилиндра —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.13.**

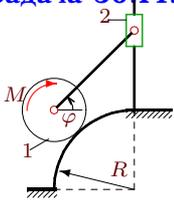
7



Невесомый уголок, составленный из двух жестко соединенных взаимно перпендикулярных стержней, опирается на гладкие опоры. Диск радиуса  $r$ , закрепленный на конце стержня длиной  $AB = a$ , катится по боковой поверхности груза, скользящего по гладкой плоскости. К уголку приложен момент  $M$ . Масса диска равна  $m_1$ , груза —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота уголка  $\varphi$ .

**Задача 30.14.**

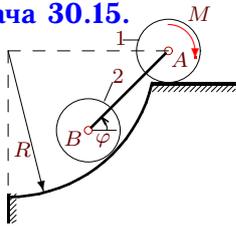
7



Ось диска массой  $m_1$  радиусом  $r$  соединена стержнем длиной  $4r$  с муфтой, скользящей по вертикальной направляющей. Диск катится по цилиндрической поверхности радиусом  $R = 3r$ . К диску приложен момент  $M$ . Масса муфты  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**Задача 30.15.**

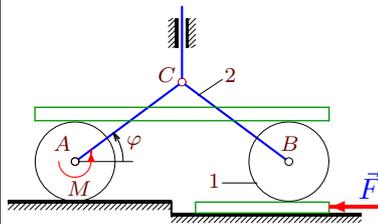
7



Оси двух дисков радиусами  $r$  соединены стержнем длиной  $4r$ . Диск  $A$  массой  $m_1$  катится по горизонтальной поверхности, другой, массой  $m_2$ , — по цилиндрической поверхности радиусом  $R = 5r$ . К диску  $A$  приложен момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $\varphi$ .

**Задача 30.16.**

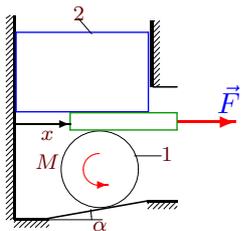
7



Два стержня одинаковой длины  $a$  шарнирно прикреплены к вертикальному штоку. Стержень  $AC$  соединен с осью диска  $A$ , который катится по горизонтальному основанию. Диск  $B$  катится по пластине, скользящей по тому же основанию. На дисках лежит горизонтальный брусок. Масса диска  $B$  равна  $m_1$ , стержня  $BC$  —  $m_2$ . К диску  $A$  приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $AC$   $\varphi$ .

**Задача 30.17.**

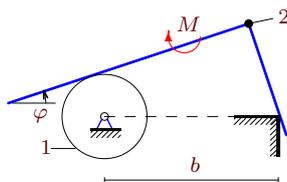
7



Между диском радиусом  $R$  и прессом зажата пластина, скользящая по гладкой поверхности пресса. Диск катится по наклонной ( $\alpha$ ) поверхности. Масса диска  $m_1$ , пресса —  $m_2$ . К диску приложен момент  $M$ , к пластине — горизонтальная сила  $F$ . Проскальзывание в точках контакта диска отсутствует. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять горизонтальное перемещение пластины  $x$ .

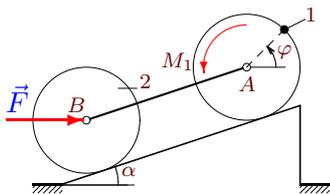
**Задача 30.18.**

7



Невесомый уголок, составленный из двух жестко соединенных взаимно перпендикулярных стержней, опирается без проскальзывания на диск массой  $m_1$  радиуса  $R$  с неподвижной осью и гладкий угол. На уголке, к которому приложен момент  $M$ , находится точка массой  $m_2$ . Все тела расположены в горизонтальной плоскости. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота уголка  $\varphi$ .

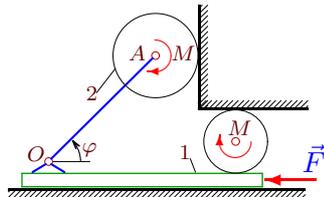
**Задача 30.19.**



Два цилиндра катятся по плоскости, наклоненной под углом  $\alpha$ . Точка массой  $m_1$  расположена на ободе невесомого цилиндра A радиусом  $R$ . К оси цилиндра B радиусом  $R$  массой  $m_2$  приложена горизонтальная сила  $F$ . Цилиндры соединены невесомым стержнем длины  $L$ . Момент  $M_1$  приложен к цилиндру A. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота  $\varphi$  цилиндра A.

7

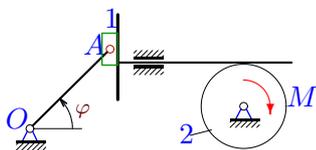
**Задача 30.20.**



На шарнире A кривошипа OA длиной  $a$ , закрепленного на горизонтально скользящем бруске, касаясь вертикальной поверхности, вращается цилиндр радиуса  $R$ . Между бруском массой  $m_1$  и горизонтальной поверхностью катается цилиндр радиуса  $r$ . К цилиндрам приложены равные моменты  $M$ , к бруску — горизонтальная сила  $F$ . Масса цилиндра A равна  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

7

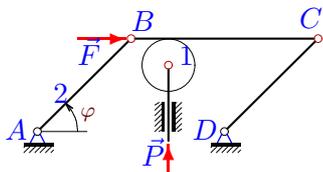
**Задача 30.21.**



Брусок A массы  $m_1$ , закрепленный на кривошипе OA, скользит по поверхности поршня. Поршень приводит в движение цилиндр радиусом  $R$  массы  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ .  $AO = a$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

7

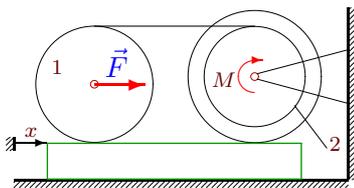
**Задача 30.22.**



Диск массы  $m_1$  шарнирно закреплен на штоке и катится без проскальзывания по звену BC шарнирного параллелограмма, расположенного в горизонтальной плоскости. Масса AB —  $m_2$ . На шток действует сила  $P$ , на звено BC — сила  $F$ .  $AB = a$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

7

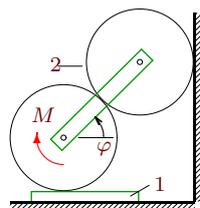
**Задача 30.23.**



Цилиндр массой  $m_1$  катится без проскальзывания по бруску, скользящему по гладкой горизонтальной поверхности. По этому же бруску катится и блок (внешний радиус  $R$ , внутренний —  $r$ ) с неподвижной осью. Цилиндр и блок огибает горизонтальная нить. Масса блока  $m_2$ . Момент инерции блока  $J$ . На блок действует момент  $M$ , на цилиндр — горизонтальная сила  $F$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять координату  $x$  бруска.

7

**Задача 30.24.**

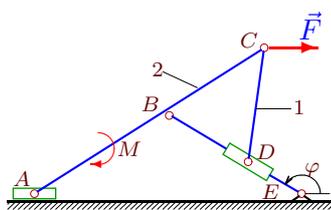


Оси цилиндров соединены спарником. Верхний цилиндр катится без проскальзывания по вертикальной плоскости. Нижний цилиндр находится в зацеплении с верхним и катится по пластинке массой  $m_1$ , скользящей по горизонтальной плоскости. Радиусы цилиндров  $R$ . Масса верхнего цилиндра  $m_2$ . К нижнему цилиндру приложен момент  $M$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота спарника  $\varphi$ .

7

**Задача 30.25.**

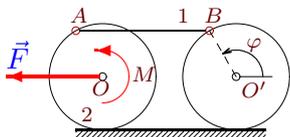
7



Стержень  $AC$  шарнирно соединен со стержнем  $BE$ , а шарнир  $C$  стержнем  $DC$  соединен с муфтой, скользящей по  $BE$ . Ползун  $A$  скользит по гладкой поверхности. К стержню  $AC$  приложен момент  $M$ , к шарниру  $C$  — горизонтальная сила  $F$ ;  $AB = BE = a$ ,  $BC = CD = b$ . Масса стержня  $DC$  равна  $m_1$ , стержня  $AC$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $BE$   $\varphi$ .

**Задача 30.26.**

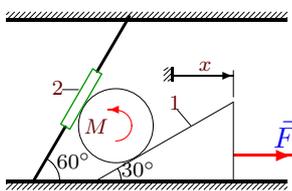
7



Два диска шарнирно соединены стержнем  $AB$  массой  $m_1$ . К диску массой  $m_2$  приложен момент  $M$  и горизонтальная сила  $F$ . Второй диск считать невесомым;  $AB \parallel OO'$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**Задача 30.27.**

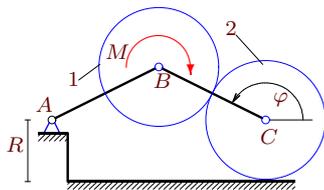
7



Цилиндр радиусом  $R$  зажат между муфтой, надетой на наклонный стержень, и призмой, скользящей по гладкой горизонтальной поверхности. Масса призмы  $m_1$ , муфты —  $m_2$ . К цилиндру приложен момент  $M$ , к призме — горизонтальная сила  $F$ . Проскальзывание в точках контакта цилиндра отсутствует. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $x$ .

**Задача 30.28.**

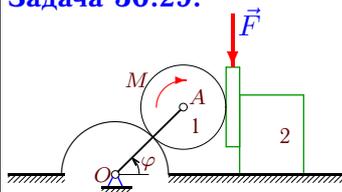
7



Два цилиндра одинакового радиуса  $R$  находятся в зацеплении. Цилиндр  $C$  катится по горизонтальной плоскости. Стержни  $AB$  и  $BC$  одинаковой длины шарнирно соединены на оси  $B$ . К цилиндру  $B$  приложен момент  $M$ . Масса цилиндра  $B$  —  $m_1$ , цилиндра  $C$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня  $BC$   $\varphi$ .

**Задача 30.29.**

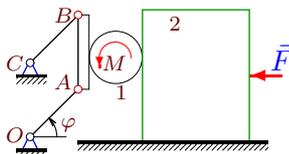
7



Цилиндр радиусом  $r$  массы  $m_1$  катится по поверхности неподвижного цилиндра радиусом  $R$  и находится в зацеплении с бруском, скользящим по грани подвижного блока массой  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**Задача 30.30.**

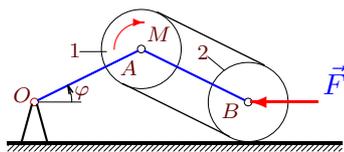
7



Цилиндр радиусом  $R$  массой  $m_1$  катится по вертикальной поверхности звена  $AB$  шарнирного параллелограмма и боковой грани бруска массой  $m_2$ . К бруску приложена сила  $F$ , к цилиндру — момент  $M$ .  $AO = BC = a$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**Задача 30.31.**

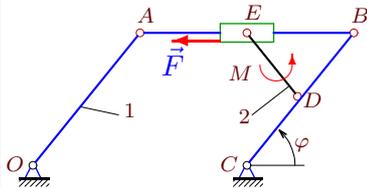
7



Два цилиндра одинакового радиуса  $R$  связаны нерастяжимой нитью. Оси цилиндров соединены стержнем  $AB$  шарнирного двухзвенника  $OAB$ . Цилиндр  $B$  катается по горизонтальной плоскости. К оси  $B$  приложена горизонтальная сила  $F$ , к цилиндру  $A$  — момент  $M$ ;  $OA = AB = a$ . Масса стержня  $BC$  равна  $m_1$ , цилиндра  $B$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.32.**

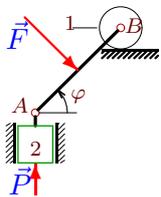
7



На горизонтальном стержне  $AB$  шарнирного параллелограмма  $OABC$  надета невесомая муфта  $E$ , соединенная стержнем  $DE$  с серединой кривошипа  $BC$ . К стержню  $DE$  приложен момент  $M$ , к муфте  $E$  — горизонтальная сила  $F$ ;  $OA = CB = 2a$ ,  $DE = a$ . Масса кривошипа  $OA$  равна  $m_1$ , масса стержня  $DE$  —  $m_2$ . Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота кривошипа  $\varphi$ .

**Задача 30.33.**

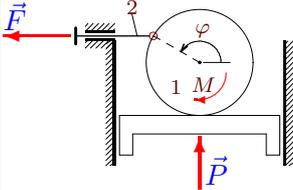
7



Невесомый стержень  $AB$  длиной  $a$  шарнирно соединяет диск массой  $m_1$ , движущийся по горизонтальной поверхности, и вертикальный поршень массой  $m_2$ . Сила  $F$  приложена к середине стержня под прямым углом, сила  $P$  — к поршню. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .

**Задача 30.34.**

7



Цилиндр массой  $m_1$  радиусом  $R$  находится на поверхности поршня. Шток массой  $m_2$ , движущийся в горизонтальных направляющих, шарнирно прикреплен к ободу цилиндра. Момент  $M$  приложен к цилиндру, сила  $P$  — к поршню,  $F$  — к штоку. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять  $\varphi$ .